곡선 그리드상에 정의된 벡터 필드를 위한 다해상도 모형

정일홍[†] · 장우현[††] · 조세홍[†††] · 이봉환[††††]

요 약

본 논문에서는 곡선 그리드상의 2차원 플로우를 분석하고 시각화하기 위한 다해상도 모형을 제안한다. 다해상도 분석은 여러 상세 단계에서 윤곽을 나타내고 분석하는 매우 유용한 도구이다. 일반적으로 벡터 필드의 데이터는 매우 크고 복잡하기 때문에 벡터 필드 시각화에 다해상도 분석을 적용하는 것은 매우 유용하다. 낮은 해상도에서의 근사 값을 사용하면 벡터필드 위상의 전체적인 개요를 짧은 시간 안에 파악할 수 있다. 부분 합성은 사용자가 관심 있는 부분만 합성함으로써 효과적으로 확대 또는 축소할 수 있게 해준다.

이 새로운 모형은 네스트된 곡선 그리드 영역 상에 구분 적으로 정의된 함수의 네스트된 공간에 기초를 두고 있다. 네스트된 영역은 안쪽 경계선의 원래 기하학적 형상을 유지하기 위해 사용된다. 본 논문에서는 이러한 영역 위에서 Haar 웨이브릿에 대한 정제 방정식과 합성 방정식을 제안하고 예제들을 보여준다.

Multiresolution Model for Vector Fields Defined over Curvilinear Grids

Il-Hong Jung[†], Woohyun Jang[††], Sae-Hong Cho[†††] and Bong-Whan Lee[††††]

ABSTRACT

This paper presents the development of multiresolution model for the analysis and visualization of two-dimensional flows over curvilinear grids. Multiresolution analysis provides a useful and efficient tool to represent shape and to analyze features at multiple level of detail. Applying multiresolution analysis to vector field visualization is very useful and powerful as the vector field's data sets are usually huge and complex. Using approximation at lower resolution, brief outline of topology can be extracted in short periods of time. Local reconstruction allows the user to zoom in or out, only by reconstructing the portion of interest.

This new model is based upon nested spaces of piecewise defined function over nested curvilinear grid domains. The nested domains are selected so as to maintain the original geometry of the inner boundary. This paper presents the refinement and decomposition equations for Haar wavelet over these domains and shows some examples.

1. 서 론

다해상도 모형(multiresolution model)은 멀티미디어 데이터의 분석과 가시화에 매우 중요한 역할을 한다. 특히, 웨이브릿에 기반을 둔 다해상도 모형은 과학적 데이터의 가시화와 컴퓨터 그래픽스에서 여러 종류의 데이터들을 위해 개발되고 적용되어 왔다 [1,2]. 본 논문에서는 곡선 그리드상에 정의된 2차원 벡터 필드(vector fields)를 위한 새로운 다해상도 모형을 제안한다. 플로우(flow)를 수학적으로 모형화하는 방정식을 수치적으로 푸는 방법들 때문에 곡선 그리드는 종종 벡터필드와 연관이 된다[3]. 그림 1은

[†] 정회원, 대전대학교 컴퓨터통신전자공학부
[††] 전자연구통신원 표준연구센터
[†††] 정회원, 대구대학교 정보통신공학부
[††††] 대전대학교 정보통신시스템공학부

본 논문의 전체적인 개요를 설명한다. 이 연구에서는 플로우 필드(flow field)를 잘 표현하는 낮은 해상도 모형을 계산하고, 높은 해상도에서의 복잡하고 자세한 내용을 제거하여 플로우 필드의 전체적인 개요를 보여줄 수 있는 다해상도 모형을 설계한다. 플로우 필드를 시각화하는 수많은 방법이 있지만 본 논문에서는 위상적 그래프 방법[3,4]을 사용한다. 플로우 필드를 시각화하는데 어떠한 방법이 사용되는가는 본 본문의 논점이 아니고 다해상도 모형이 본 논문의 주제이다. 위상적 그래프 방법을 선택한 이유는 본 논문에서 나타내고자하는 모형의 특성을 잘 나타내기 때문이다. 본 논문에서 제안한 다해상도 모형은 플로우 필드의 낮은 해상도에서의 근사 값을 계산할 뿐 아니라, 플로우 필드의 효과적인 합성(reconstruction)을 위해 충분한 정보를 유지한다. 특히, 부분적인 합성도 효과적으로 할 수 있어 관심 있는 부분만 합성하면서 확대 또는 축소할 수 있다.

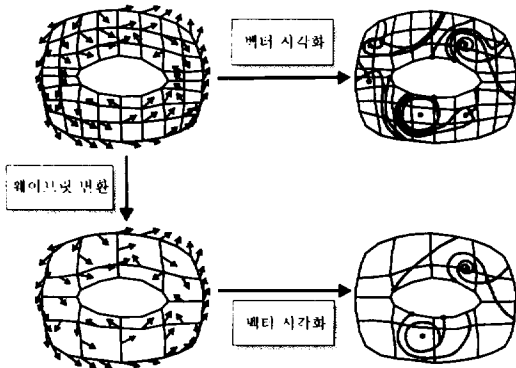



그림 1. 곡선 그리드상의 벡터 필드를 위한 다해상도 모형의 개요

전형적인 웨이브릿 이론에서 모든 단계의 기저 함수는 하나의 모 함수(mother function)의 전이(translation)와 팽창(dilation)을 통하여 만들어진다. 일반적으로 규칙적인 영역(regular domain)에서의 웨이브릿을 만드는 도구로써 퓨리에 변환(Fourier transformation)을 사용한다[5,6]. Haar 웨이브릿은 퓨리에 변환을 사용하여 유도되었기 때문에 Haar 웨이브릿은 보통 규칙적인 영역(regular domains)에서만 적용된다. 곡선 그리드는 불규칙 영역(irregular domain)이므로 곡선 그리드상에 정의된 벡터 필드에는 퓨리에 변환으로 유도된 Haar 웨이브릿을 적용하여 다해상도 모형을 만들 수 없다. 본 논문에서는 퓨리에 변환을 사용하는 대신에 Lounsbery[7,8]가 사용한 선형 시스템의 해를 구하는 방법을 사용하여 웨이브릿을 만드는 방법은 제안한다.

2. 웨이브릿과 다해상도 모형

2.1 웨이브릿 변환과 필터 뱅크 알고리즘

이산 데이터 집합 $C^n=\{c_j^n \mid j=0,1,\cdots,2^n-1\}$ 에 대해서 샘플 데이터 c_j^n 은 하나의 영역 위에 균등하게 분포된 데이터이다. 더 작은 샘플의 수 m'을 가지고 C^n의 낮은 해상도인 C^{n-1}을 만들려고 한다면, 이것은 필터를 가지고 다운샘플링(down sampling)을 통해 수행된다. 이 과정은 행렬표기법으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} c_0^{n-1} \\ c_1^{n-1} \\ \vdots \\ c_{m'}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}^n & a_{01}^n & \cdots & \cdots & a_{0m-1}^n & a_{0m}^n \\ a_{10}^n & a_{11}^n & \cdots & \cdots & a_{1m-1}^n & a_{1m}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m'0}^n & a_{m'1}^n & \cdots & \cdots & a_{m'm-1}^n & a_{m'm}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^n \\ c_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{m-1}^n \\ c_m^n \end{bmatrix} \tag{1}$$

식 (1)에서 $m=2^n-1$이고 $m'=2^{n-1}-1$이다. 식 (1)은 다음과 같이 간단한 행렬형태로 표시할 수 있다.

$$C^{n-1}=A^nC^n \tag{2}$$

C^{n-1}은 C^n보다 적은 샘플 데이터를 가지고 있기 때문에 잃어버린 상세 정보인 D^{n-1}을 포착하기 위한 다른 필터 B^n이 필요하다. 관계식은 다음과 같은 간단한 행렬 형태로 표시할 수 있다

$$D^{n-1}=B^nC^n \tag{3}$$

샘플 데이터 C^n을 낮은 해상도 C^{n-1}과 상세 정보 D^{n-1}로 나누는 과정을 분해(decomposition)라 한다. 분해과정에서 사용된 필터 A^n과 B^n을 분해 필터(analysis filters)라 한다.

원래 데이터 C^n은 합성 필터(synthesis filters)인 H^n과 G^n을 사용하여 C^{n-1}와 D^{n-1}로부터 합성될 수 있다. 합성 필터는 다음과 같이 표현된다.

$$C^n=H^nC^{n-1}+G^nD^{n-1} \tag{4}$$

C^{n-1}와 D^{n-1}으로부터 C^n을 합성시키는 과정을 합성(reconstruction)이라 한다.

새로운 낮은 해상도 C^{n-1}은 C^{n-2}와 D^{n-2}로 다시 분해될 수 있다. 이러한 분해과정을 반복적으로 적용하면 원래 데이터 C^n은 낮은 해상도 $C^0,\cdots,C^{n-1}$과 상세 정보 $D^0,\cdots,D^{n-1}$와 같이 계층적으로 표현될 수 있다. 그림 2에서 보여주는 이러한 반복 과정을 필터 뱅크 알고리즘(filter bank algorithm)이라 한다.

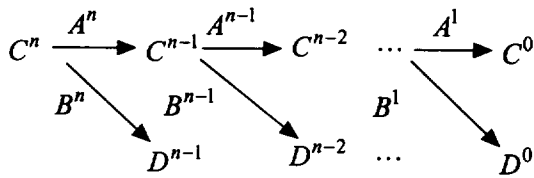



그림 2. 필터 뱅크

원래 데이터 C^n는 $C^0, D^0,\cdots,D^n$으로부터 합성되기 때문에 이 것을 웨이브릿 변환이라 생각할 수 있다. $C^0,\cdots,C^{n-1}$을 스케일링 계수(scaling coefficients)라 부르고 $D^0,\cdots,D^{n-1}$은 웨이브릿 계수(wavelet coefficients)라 부른다.

2.2 다해상도 분석 (Multiresolution Analysis)

Mallet[9,10]에 의해 개발된 다해상도 분석 이론을 통해 분해 필터와 합성필터를 만들 수 있다. 벡터 공간 V^j의 기저 함수를 스케일링 함수 $\phi(x)$라하고 직교 보수 공간 W^j에 신장된(spanning) 선형 독립적 함수들 $\psi(x)$의 집합을 웨이브릿이라 한다. 분해 필터와 합성 필터는 스케일링 함수와 웨이브릿의 관계로부터 만들어진다. 합성 필터에 관계된 식은 다음과 같다.

$$\phi(x)=\sum_k h_k\phi(2x-k) \tag{5}$$

$$\psi(x)=\sum_k g_k\psi(2x-k) \tag{6}$$

여기서 h_k와 g_k는 필터 G와 H의 필터계수이다. 식 (5)와 (6)을 두 가지 스케일 관계(two-scale relation)라 부른다. 분해 필터에 관계된 분해 관계식은 다음과 같다.

$$\phi(2x-\ell)=\sum_k(a_{\ell-2k}\phi(x-k)+b_{\ell-2k}\psi(x-k)) \tag{7}$$

여기서 $a_{\ell-2k}$와 $b_{\ell-2k}$는 필터 A와 B의 필터계수이다. 직교 웨이브릿의 경우에는[5] $A=H^T$이고 $B=G^T$이다. 그래서 샘플 데이터는 H^T와 G^T에 의해 분해되고 G와 H을 가지고 합성한다.

예를 들어 Haar 웨이브릿의 경우에서의 분해 필터와 합성 필터를 다해상도 분해 이론을 사용하여 만들어보자. Haar 웨이브릿은 다음과 같이 구간 적으로 상수 함수로부터 만들어진다.

$$\phi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

스케일링 기저(scaling base)와 웨이브릿 기저(wavelet base)는 다음과 같이 낮은 해상도의 기저의 선형 조합(linear combination)으로 표현된다.

$$\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-1)$$

$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

위의 관계식으로부터 합성 필터 G와 H의 필터계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h_k=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad g_k=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

그러므로, 합성 필터는 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$이고, Haar 웨이브릿은 직교 웨이브릿이므로 분해필터는 합성필터의 전치행렬로부터 쉽게 구해진다.

3. 꼭지점 제거 기법 (Vertex removal technique)

많은 실세계의 데이터들은 일정한 간격으로 추출되지 않는다. 특히, 벡터필드의 데이터들은 그리드 안에 포함된 물체들이 그리드의 모양을 변경시키기 때문에 보통 곡선 그리드상에 정의된다[11]. 일반적으로 물체근처의 그리드 선은 물체의 외형을 닮기 때문에 본 논문에서는 이러한 선들을 안쪽 경계선(inner boundary)이라 정의한다.

곡선 그리드는 파라메트릭 맵(parametric map)으로 볼 수 있고, 파라메트릭 곡선에 대해 웨이브릿을 사용하는 기법은 벌써 개발되어 있다[12,13]. 그러나, 이 파라메트릭 웨이브릿 기법에는 기본적인 문제점이 있다. 이 방법이 위상적인 탄젠트 곡선에 대해 낮

은 해상도의 근사 값을 구하기 위해 사용될 때, 탄젠트 곡선뿐만 아니라 영역(domain)의 경계선에 대해서도 낮은 해상도의 근사 값이 구해진다. 이것은 영역이 부드러워진다는 것을 의미한다. 그림 3과 같이 왼쪽 아랫부분의 모가 없어지고 둥글어진다. 반복이 계속되면 이러한 변형은 심각하게 된다. 그러므로 더 좋은 방법은 모든 단계에서 원래의 경계선 모양을 보존되어야 한다.

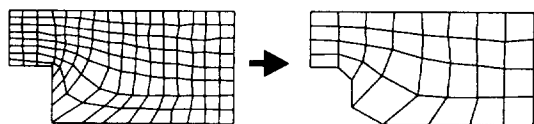



그림 3. 파라메트릭 웨이브릿 기법에서의 경계선 문제

벡터 필드 분석에서 종종 중요한 일들이 경계선 주위에서 일어난다. 그러므로 안쪽, 바깥쪽 경계선을 보존하는 것은 매우 중요하다. 그렇게 하기 위해서 그림 4와 같이 교대로 꼭지점을 제거하는 영역 분해 방법을 사용한다. 이 방법은 안쪽, 바깥쪽 경계선을 보존할 수 있다. 계속해서 낮은 해상도의 영역을 만들어 질 때 이 기법은 두 가지 중요한 특성을 보장한다. 첫 번째 특성은 영역이 네스트(nest)된다는 것이다. 이 특성은 구간 적으로 정의된 함수공간도 잠정적으로 네스트 된다는 것을 보장한다. 이것은 단계 j에서의 근사 값은 단계 $j+1$에서의 근사 값의 집합에 포함된다는 것을 의미한다. 두 번째 특성은 안쪽 경계선이 영역을 분해할 때 보존된다는 것이다. 이 특성은 벡터 필드 분석에서 흥미로운 현상이 안쪽 경계선에서 종종 발생하기 때문에 중요한 특성이라 할 수 있다.

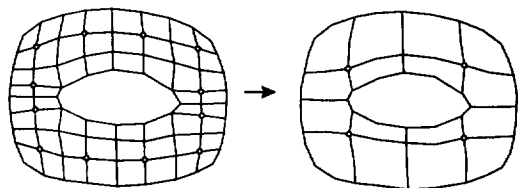



그림 4. 꼭지점 제거 기법에 의한 그리드 분해

4. 곡선 그리드상에서의 Haar 웨이브릿

불규칙적인 영역에서 Haar 스케일링 함수 $\phi_\ell^j(x)$는 구간 적 상수 함수이다

$$\phi_\ell^j(x) = \begin{cases} 1, & x_\ell^j \le x \le x_{\ell+1}^j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

그림 5는 1차원에서 단계 j와 $j+1$에서의 불규칙적 영역(irregular domain)을 보여준다.

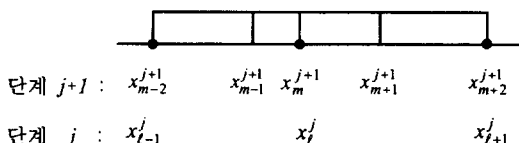



그림 5. 1차원 시스템의 단계 j와 단계 $j+1$에서의 불규칙 영역

여기서 불규칙 영역에서 Haar 스케일링 함수와 같이 사용하기 위해 1차원에서의 불규칙 영역에서 Haar 웨이브릿 $\psi_\ell^j(x)$을 Lounsbery가 사용한 비슷한 방법으로 유도한다[7,8].

Haar 웨이브릿 $\psi_\ell^j(x)$을 유도하기 위해 먼저 $\bar{\phi}_\ell^j(x)$가 $\phi_\ell^{j+1}(x) \in V^{j+1}$이 V^j에 직교 투영되도록 정의한다. 그러므로 직교투영은 $\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x)$을 다음과 같이 표현하게 한다.

$$\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x) = \sum_\ell \alpha_\ell \phi_\ell^j(x) \quad for\ fixed\ \ell^* \tag{8}$$

웨이브릿 $\psi_{\ell^*}^j(x)$는 $\phi_m^{j+1}(x)$와 $\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x)$으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_{\ell^*}^j(x) = \phi_m^{j+1}(x) - \bar{\phi}_{\ell^*}^j(x) \tag{9}$$

$\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x)$은 $\phi_m^{j+1}(x) \in V^{j+1}$이 V^j에 직교 투영되었으므로 웨이브릿 $\psi_{\ell^*}^j(x)$은 V^j에 직교한다.

이제 $\phi_m^{j+1}(x) \in V^{j+1}$이 V^j에 직교 투영되었다는 사실을 통해 α_ℓ을 계산할 수 있다. 이것은 α^T에 대해 다음과 같은 무한 선형 시스템의 해를 구하는 것과 동일하다.

$$\left[\left\langle \phi_g^j(x), \phi_h^j(x) \right\rangle\right] \alpha^T = \left[\left\langle \phi_m^{j+1}(x), \phi_g^j(x) \right\rangle\right] \tag{10}$$

위의 무한 선형 시스템 (10)의 해를 Haar 웨이브릿의 경우에 대해 구하면 다음과 같이 계수 α의 무한개의 값을 구할 수 있다.

$$\alpha_{\ell^*} = \frac{x_{m+1}^{j+1} - x_m^{j+1}}{x_{\ell^*+1}^j - x_{\ell^*}^j}, \quad \alpha_{-\infty} = \cdots = \alpha_{\ell^*-1} = \alpha_{\ell^*+1} = \cdots = \alpha_\infty = 0. \tag{11}$$

다행히 Haar 웨이브릿의 경우 α_{ℓ^*} 을 제외한 모든 계수가 0이므로 $\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x)$와 $\psi_{\ell^*}^j(x)$은 다음과 같이 된다.

$$\bar{\phi}_{\ell^*}^j(x) = \frac{x_{m+1}^{j+1} - x_m^{j+1}}{x_{\ell^*+1}^j - x_{\ell^*}^j}\phi_{\ell^*}^j(x), \tag{12}$$

$$\psi_{\ell^*}^j(x) = \phi_m^{j+1}(x) - \frac{x_{m+1}^{j+1} - x_m^{j+1}}{x_{\ell^*+1}^j - x_{\ell^*}^j}\phi_{\ell^*}^j(x). \tag{13}$$

역으로, 스케일링 함수의 정제 관계(refinement relationship)를 이용하여 식 (13)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_{\ell^*}^j(x) = \frac{x_{\ell^*+1}^j - x_{m+1}^{j+1}}{x_{\ell^*+1}^j - x_{\ell^*}^j}\phi_m^{j+1}(x) - \frac{x_{m+1}^{j+1} - x_{\ell^*}^j}{x_{\ell^*+1}^j - x_{\ell^*}^j}\phi_{m+1}^{j+1}(x). \tag{14}$$

식 (14)을 다음과 같이 정규화(normalize)시킬 수 있다.

$$\psi_\ell^j(x) = \frac{1}{x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j}\phi_m^{j+1}(x) - \frac{1}{x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}}\phi_{m+1}^{j+1}(x). \tag{15}$$

그러므로, 스케일링과 웨이브릿의 두 가지 스케일 관계(two-scale relation)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_\ell^j(x) = \phi_m^{j+1}(x) + \phi_{m+1}^{j+1}(x),$$

$$\psi_\ell^j(x) = \frac{1}{x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j}\phi_m^{j+1}(x) - \frac{1}{x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}}\phi_{m+1}^{j+1}(x).$$

1차원 시스템의 정제(refinement)와 분해(decomposition)의 관계는 다음과 같다.

정제 관계(refinement relationship):

$$\begin{bmatrix}\phi_\ell^j(x)\\ \psi_\ell^j(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ \dfrac{1}{x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j} & \dfrac{1}{x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_m^{j+1}(x)\\ \phi_{m+1}^{j+1}(x)\end{bmatrix}$$

분해 관계(decomposition relationship):

$$\begin{bmatrix}\phi_m^{j+1}(x)\\ \phi_{m+1}^{j+1}(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j}{x_{\ell+1}^j - x_\ell^j} & \dfrac{\left(x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j\right)\left(x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}\right)}{x_{\ell+1}^j - x_\ell^j}\\ \dfrac{x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}}{x_{\ell+1}^j - x_\ell^j} & -\dfrac{\left(x_{m+1}^{j+1} - x_\ell^j\right)\left(x_{\ell+1}^j - x_{m+1}^{j+1}\right)}{x_{\ell+1}^j - x_\ell^j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_\ell^j(x)\\ \psi_\ell^j(x)\end{bmatrix}$$

2차원 시스템의 합성 필터와 분해 필터는 텐서 곱(tensor product)방법을 사용하여 만들 수 있다. 먼저 곡선 그리드의 각 행에 대하여 1차원 웨이브릿 변환을 적용한 후 각 열에 대해 1차원 웨이브릿 변환을 다시 적용한다. 1차원 시스템경우는 데이터간의 거리가 불규칙적이고 2차원 시스템경우는 면적이 불규칙하기 때문에 그림 6과 같이 셀 C_{ij}의 면적을 α_{ij}, 그리고 네 면적의 합을 α라 정의한다.

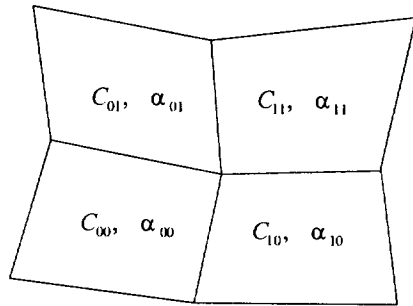



그림 6. 2차원 시스템의 불규칙 영역에 대한 용어

먼저 각 행에 대해 거리 대신 면적 α_{ij}을 사용하여 1차원 웨이브릿을 적용하면 셀 C_{00}에 면적 α_{00}와 α_{10}에 가중치를 둔 스케일링 함수, C_{10}에는 면적 α_{00}와 α_{10}에 가중치를 둔 상세 정보를 포착하기 위한 웨이브릿 함수가 생성된다. 그리고 셀 C_{01}에 면적 α_{01}와 α_{11}에 가중치를 둔 스케일링 함수, C_{11}에는 면적 α_{01}와 α_{11}에 가중치를 둔 웨이브릿 함수가 만들어진다. 여기에 다시 각 열에 대해 면적을 가중치로 하여 1차원 웨이브릿을 적용하면 셀 C_{00}에 면적 $\alpha_{00}+\alpha_{10}$와 $\alpha_{01}+\alpha_{11}$에 가중치를 둔 각 행의 스케일링 함수에 대한 스케일링 함수, C_{01}에는 면적 $\alpha_{00}+\alpha_{10}$와 $\alpha_{01}+\alpha_{11}$에 가중치를 둔 각 행의 스케일링 함수에 대한 웨이브릿 함수가 생성된다. 그리고 셀 C_{10}에 면적 $\alpha_{00}+\alpha_{10}$와 $\alpha_{01}+\alpha_{11}$에 가중치를 둔 각 행의 웨이브릿 함수에 대한 스케일링 함수, C_{01}에는 면적$\alpha_{00}+\alpha_{10}$와 $\alpha_{01}+\alpha_{11}$에 가중치를 둔 각 행의 웨이브릿 함수에 대한 웨이브릿 함수가 생성된다. 2차원 시스템에서는 각 행의 스케일링 함수에 대한 스케일링 함수가 스케일링 함수가 되고, 나머지는 웨이브릿 함수가 된다. 이러한 과정을 통해 정제 관계(refinement relationship)를 만들 수 있고 이 것의 역행렬을 구하여 분해 관계(decomposition relationship)

를 구할 수 있다.

2차원 시스템의 정제(refinement)와 분해(decomposition)의 관계는 다음과 같다.

정제 관계(refinement relationship) :

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi_{10} \\ \psi_{01} \\ \psi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{00}+\alpha_{10}} & \frac{1}{\alpha_{00}+\alpha_{10}} & -\frac{1}{\alpha_{01}+\alpha_{11}} & -\frac{1}{\alpha_{01}+\alpha_{11}} \\ \frac{1}{\alpha_{00}} & -\frac{1}{\alpha_{10}} & \frac{1}{\alpha_{01}} & -\frac{1}{\alpha_{11}} \\ \frac{1}{\alpha_{00}(\alpha_{00}+\alpha_{10})} & -\frac{1}{\alpha_{10}(\alpha_{00}+\alpha_{10})} & -\frac{1}{\alpha_{01}(\alpha_{01}+\alpha_{11})} & \frac{1}{\alpha_{11}(\alpha_{01}+\alpha_{11})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{00} \\ \phi_{10} \\ \phi_{01} \\ \phi_{11} \end{bmatrix}$$

분해 관계(decomposition relationship) :

$$\begin{bmatrix} \phi_{00} \\ \phi_{10} \\ \phi_{01} \\ \phi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{00}}{\alpha} & \frac{\alpha_{00}(\alpha_{01}+\alpha_{11})}{\alpha} & \frac{\alpha_{00}\alpha_{10}}{\alpha} & \frac{\alpha_{00}\alpha_{10}(\alpha_{01}+\alpha_{11})}{\alpha} \\ \frac{\alpha_{10}}{\alpha} & \frac{\alpha_{10}(\alpha_{01}+\alpha_{11})}{\alpha} & -\frac{\alpha_{00}\alpha_{10}}{\alpha} & -\frac{\alpha_{00}\alpha_{10}(\alpha_{01}+\alpha_{11})}{\alpha} \\ \frac{\alpha_{01}}{\alpha} & -\frac{\alpha_{01}(\alpha_{00}+\alpha_{10})}{\alpha} & \frac{\alpha_{01}\alpha_{11}}{\alpha} & -\frac{\alpha_{01}\alpha_{11}(\alpha_{00}+\alpha_{10})}{\alpha} \\ \frac{\alpha_{11}}{\alpha} & -\frac{\alpha_{11}(\alpha_{00}+\alpha_{10})}{\alpha} & -\frac{\alpha_{01}\alpha_{11}}{\alpha} & \frac{\alpha_{01}\alpha_{11}(\alpha_{00}+\alpha_{10})}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi_{10} \\ \psi_{01} \\ \psi_{11} \end{bmatrix}$$

위의 행렬식에서 $\alpha = \alpha_{00} + \alpha_{01} + \alpha_{10} + \alpha_{11}$ 이다.

5. 구현 결과 및 비교 분석

위의 알고리즘을 이용하여 곡선 그리드상의 정의된 2차원 벡터 필드에 대한 다해상도 모형을 구현하였다. 또한 제안된 알고리즘에 대해 비교 분석을 위해 파라메트릭 웨이브릿 기법을 구현하였다. 2차원 벡터 필드의 가시화를 위해 2가지 데이터를 사용하였다. 하나는 그림 7에서 보여주는 날개 데이터(wing data)이고 다른 하나는 그림 10에서 보여주는 3차원 Nissan 자동차 데이터의 한 단면 데이터이다.

그림 7과 8에서 제안된 다해상도 모형과 파라메트릭 웨이브릿 기법으로 구현된 네 가지 해상도에서의 위상적 그래프들을 보여주고 있다. 그림 7에서와 같이 본 논문에서 제안한 다해상도 모형을 적용하면 해상도가 낮아짐에도 불구하고 안쪽과 바깥쪽 경계선들은 원래 데이터와 비교하여 변하지 않는 장점을 가지고 있다. 그러나 그림 8에서는 보듯이 파라메트릭 웨이브릿 기법은 경계선에 대해서도 낮은 해상도의 근사 값이 구해진다. 경계선이 변형된다는 것을 의미한다. 반복이 계속되면 이러한 변형은 심각하게 된다. 벡터 필드 분석에서 종종 의미 있는 위상적 그래프들이 경계선 주위에서 일어난다. 그림 8에서와 같이 해상도가 낮아지면서 경계선이 더욱 더 변형되어 의미 있는 위상적 그래프들이 없어지는 결과를 초래한다. 이로 인해 잘못 된 벡터 필드 분석이 될 수 있다. 그래서 벡터 필드를 위한 다해상도 모형은 모든 해상도에서 원래의 경계선 모양을 보존되는 것이 중요하다.

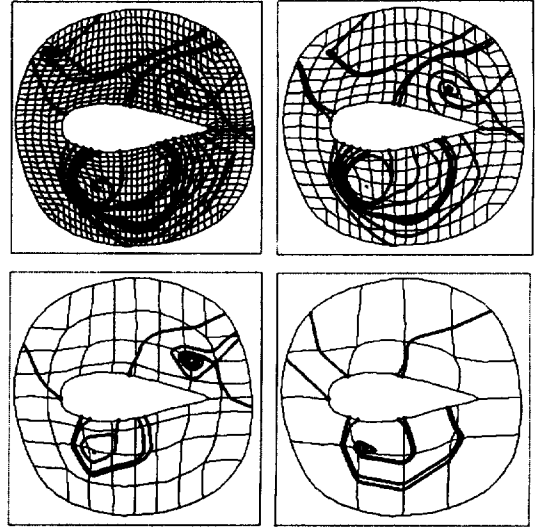



그림 7. 제안된 다해상도 모형으로 구현한 2차원 벡터 필드에 대한 네 가지 해상도에서의 위상적 그래프

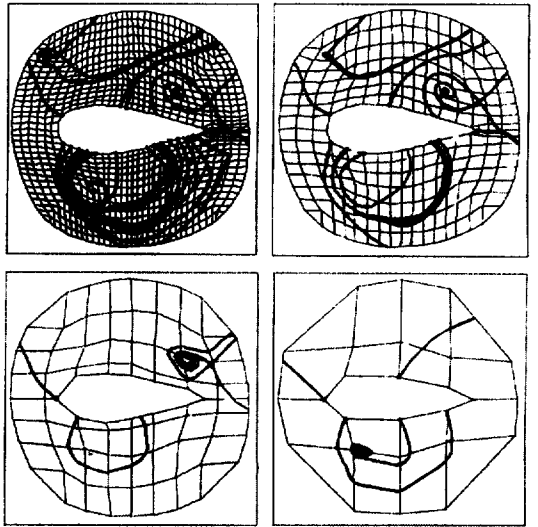



그림 8. 파라메트릭 웨이브릿 기법으로 구현한 2차원 벡터 필드에 대한 네 가지 해상도에서의 위상적 그래프

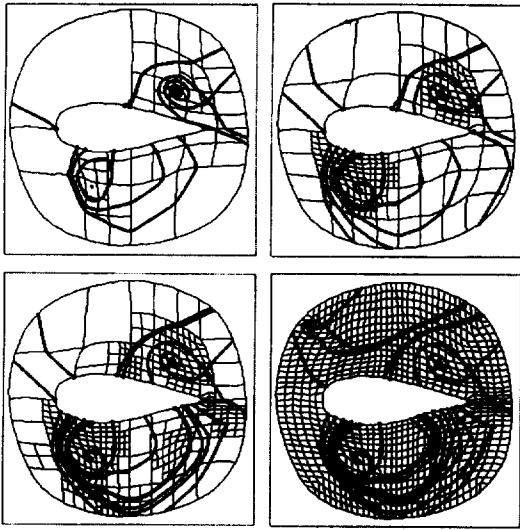



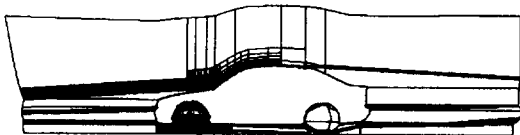
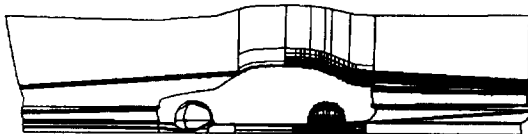
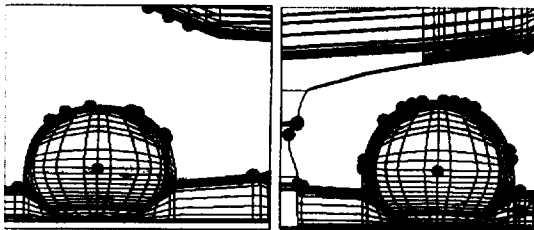
그림 9. 곡선 그리드상의 벡터 필드에 대한 부분 합성 (날개 데이터)

a) 앞 유리창과 바퀴 부분에 대한 부분 합성

b) 뒤 유리창과 바퀴 부분에 대한 부분 합성

c) 바퀴 부분에 대한 부분 합성 (확대 그림)

그림 10. 곡선 그리드상의 벡터 필드에 대한 부분 합성 (자동차 데이터)

6. 결 론

본 논문에서 제안한 곡선 그리드상에 정의된 2차원 벡터 필드를 위한 다해상도 모형은 모든 해상도에서 원래 데이터의 경계선 모양을 보존하면서 위상적인 탄젠트 곡선에 대해 낮은 해상도의 근사 값을 구해 가시화 한 반면, 종래의 기법인 파라메트릭 웨이브릿 기법은 위상적인 탄젠트 곡선에 대해 낮은 해상도의 근사 값을 구하기 위해 사용될 때, 탄젠트 곡선뿐만 아니라 경계선에 대해서도 낮은 해상도의 근사 값이 구하기 때문에 경계선이 변형된다. 이러한 변형은 낮은 해상도를 갈수록 더욱 더 심각하게 된다. 따라서 본 논문에서 제시한 다해상도 모형은 종래의 방법과는 다르게 곡선 그리드상의 탄젠트 곡선에 대해 낮은 해상도의 근사 값을 계산하는데 정확성이 보장된다.

또한 본 논문에서 제안한 다해상도 모형에서는 부분 합성(local reconstruction)을 지원한다. 사용자가 낮은 해상도에서 위상적 그래프의 대략적인 개요를 보면서 어떤 특정 부분만 더 자세히 보고자 원할 때 부분 합성은 관심 있는 부분만 확대(zoom in) 또는 축소(zoom out)하게 해준다. 예를 들어 그림 9의 왼쪽 아래 그림은 원래 데이터이고 다른 그림은 원하는 부분에 상세함을 더해주는 부분 합성을 보여주고 있다.

앞으로 곡선 그리드상의 벡터 필드를 위한 웨이브릿 개발에서 Haar 웨이브릿이 아닌 더 높은 차수(high degree)의 웨이브릿에 대한 연구가 더 필요하다.

참 고 문 헌

[1] M. Garland and P. S. Heckbert, "Surface Simplification using Quadratic Error Metrics," *SIGGRAPH '97*, pp. 209-216, 1997.

[2] G. M. Nielson, I. -J. Jung J. Sung, "Haar Wavelets over Triangular Domains with Applications to Multiresolution Models for Flow over a Sphere," *IEEE Proc. Visualization '97*, pp. 143-149, 1997.

[3] A. Globus, C. Levit, and T. Lasinski, "A Tool for Visualizing the Topology of Three-Dimensional Vector Fields," *IEEE Proc. Visualization '91*, pp. 33-40, 1991.

[4] J. Helman and L. Hesselink, "Surface Presentation of Two- and Three-Dimensional Fluid

Flow Topology," *IEEE Proc. Visualization '90*, pp. 6-13, 1990.

[5] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, 1992.

[6] I. Daubechies, "Orthonomal Bases of Compact Supported Wavelets," *Comm. Pure Applied Math.*, Vol. 41. pp. 909-996, 1988.

[7] M. Lounsbery, *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*, Ph.D Thesis, Department of Computer Science, University of Washington, 1994.

[8] M. Lounsbery, T. D. DeRose, and J. Warren, "Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type," Department of Computer Science 93-10-05, University of Washington, 1993.

[9] S. G. Mallet, "Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal bases of $L^2(R)$," *Trans. Amer. math. Soc.*, Vol. 315, No. 1, pp. 69-87, 1989.

[10] S. G. Mallet, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol. 11, No. 7, pp. 674-693, 1989.

[11] G. M. Nielson, I.-J. Jung, N. Srinivasan, J. Sung and J. -B. Yoon, "Tools for Computing Tangent Curves and Topological Graphs for Visualizing Piecewise Linearly Varying Vector Fields over Triangulated Domains," *Scientific Visualization: Overview, Methodologies and Techniques*, G. Nielson, H, Hagen and H. Muller, editors, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, pp. 527-562, 1997.

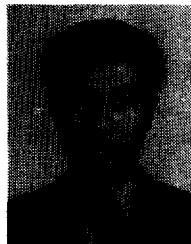
[12] C. K. Chii and J. Z. Wang, "A General Framework of Compactly Supported Splines and Wavelets," *J. Approx. Theory*, Vol. 71, No. 3, pp. 263-304, 1992.

[13] E. Quak and N. Weyrich, "Decomposition and Reconstruction Algorithms for Spline Wavelets on a Bounded Interval," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.1, No. 3, pp. 217-231, June 1994.

정 일 홍

1986년 2월 성균관대학교 산업공학과 졸업 (공학사)
1993년 12월 Arizona State University 컴퓨터공학과 졸업 (공학석사)
1998년 5월 Arizona State University 컴퓨터공학과 졸업 (공학박사)
1998년 5월～1998년 8월 Arizona State University Research Faculty
1998년 9월～현재 대전대학교 컴퓨터공학과 교수
관심분야 : 컴퓨터 그래픽스, 멀티미디어, 영상처리

장 우 현

1982년 2월 중앙대학교 전자계산학과 졸업 (이학사)
1991년 2월 중앙대학교 전자계산학과 졸업 (이학석사)
1992년 3월～현재 한국전자통신연구원 정보통신표준연구센터 책임연구원
관심분야 : 멀티미디어, 소프트웨어공학, 분산시스템

조 세 홍

1991년 12월 california 주립대학 컴퓨터공학과 졸업
1996년 12월 Arizona State University 컴퓨터공학과 졸업 (공학석사)
1999년 9월 Arizona State University 컴퓨터공학과 졸업 (공학박사)
1999년 9월～현재 대구대학교 정보통신공학부 교수
관심분야 : 멀티미디어 시스템, 가상현실, 원격교육

이 봉 환

1985년 2월 서강대학교 전자공학과 졸업 (공학사)
1987년 2월 연세대학교 전자공학과 졸업 (공학석사)
1993년 12월 Texas A&M대학교 전기공학과 졸업 (공학박사)
1993년 12월～1995년 2월 한국통신 통신망연구소 연구원
1995년 3월～현재 대전대학교 정보통신공학과 교수
1997년 4월～1997년 12월 한국전자통신연구원 초빙연구원
관심분야 : ATM 네트워크, 멀티미디어 통신